

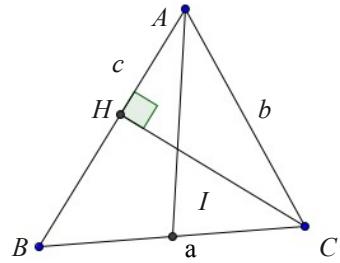
APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRES

1) RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE

A) NOTATIONS USELLES

Soit ABC un triangle quelconque. L'usage est de noter :

- $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$
- S l'aire du triangle
- $\hat{A} = \widehat{BAC}$, $\hat{B} = \widehat{ABC}$, $\hat{C} = \widehat{ACB}$



B) LE THEOREMÈE D'AL KASHI

Théorème :

On a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

Ce théorème est aussi appelé théorème de Pythagore généralisé ...

Preuve :

On a $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{AC} - \vec{AB}$

Ainsi $a^2 = |\vec{BC}|^2 = |\vec{AC} - \vec{AB}|^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \vec{AC} \cdot \vec{AB} = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

Remarques :

- De la même façon, on montre que : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$
- Si le triangle est rectangle en A , alors $\hat{A} = \frac{\pi}{2}$, $\cos \hat{A} = 0$ et ... $a^2 = b^2 + c^2$ (On retrouve le théorème de Pythagore)

C) LE THEOREMÈE DE LA MEDIANE

Théorème :

Soit I le milieu de $|BC|$. On a :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

On a aussi :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AI^2 - \frac{1}{4} BC^2 \quad \text{et} \quad AB^2 - AC^2 = 2\vec{IA} \cdot \vec{BC}$$

Preuve :

On a $AB^2 = |\vec{AB}|^2 = |\vec{AI} + \vec{IB}|^2 = AI^2 + IB^2 + 2\vec{AI} \cdot \vec{IB}$

Et $AC^2 = |\vec{AC}|^2 = |\vec{AI} - \vec{IB}|^2 = AI^2 + IB^2 - 2\vec{AI} \cdot \vec{IB}$

En additionnant membres à membres on obtient :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2IB^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

D) AIRE D'UN TRIANGLE

Propriété :

On a : $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$

Preuve :

L'aire du triangle ABC est donnée par $S = \frac{1}{2} AB \times CH$

Deux cas se présentent :

- si l'angle \hat{A} est aigu, $CH = AC \sin \hat{A}$
- si l'angle \hat{A} est obtus, $CH = AC \sin \widehat{CAH}$

Or $\widehat{CAH} = \pi - \hat{A}$, donc $\sin \widehat{CAH} = \sin (\pi - \hat{A}) = \sin \hat{A}$

Dans les deux cas, on $S = \frac{1}{2} AB \times AC \sin \hat{A} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$

Remarque :

De la même façon, on montre que $S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$ et $S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$

E) FORMULE DES SINUS

Propriété :

On a : $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$

Preuve :

On a $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$

En multipliant par $\frac{2}{abc}$, on obtient $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$

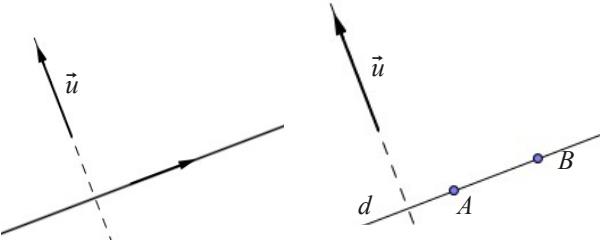
En passant aux inverses (les sinus des angles d'un triangle sont différents de zéro), on obtient $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$

2) DROITE

A) CARACTÉRISATION D'UNE DROITE

Définition :

Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de d .



Propriété :

Soit d une droite, A un point de d et \vec{u} un vecteur normal à d .

La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$.

C'est à dire

$$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$$

La droite d est l'ensemble des points M du plan tels que \overrightarrow{AM} et \vec{u} sont orthogonaux ...

Remarque : Pour montrer que deux droites sont perpendiculaires on peut utiliser le produit scalaire et les vecteurs directeurs.

B) APPLICATION : ÉQUATION D'UNE DROITE DONT ON CONNAIT UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL

Propriété :

Soit $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal et $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

- Si le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à une droite d , alors d a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ (où c est un réel)
- Réciproquement, toute droite ayant une équation de la forme $ax + by + c = 0$ (avec $(a ; b) \neq (0 ; 0)$) admet le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Preuve :

- Soit $A(x_0 ; y_0)$ un point de d et $M(x ; y)$ un point du plan, alors :

$$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\text{On a } \vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } M \in d &\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by - (ax_0 + by_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + c = 0 \quad , \text{ en posant } c = -(ax_0 + by_0) \end{aligned}$$

- Si la droite d a pour équation $ax + by + c = 0$, alors le vecteur $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d . (facile à montrer)

$$\text{Or } \vec{u} \cdot \vec{v} = a(-b) + b a = 0$$

Ainsi \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux et \vec{u} est normal à d .

3) CERCLE

A) CARACTÉRISATION D'UN CERCLE DE CENTRE ET DE RAYON DONNÉS

Propriété :

Soit A un point du plan et r un réel positif.

Le cercle C de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}^2 = r^2$

Preuve :

Soit M un point du plan.

$$M \in C \Leftrightarrow AM = r \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}^2 = r^2 \dots$$

APPLICATION : ÉQUATION D'UN CERCLE DE CENTRE ET DE RAYON DONNÉS

On se place dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $A(x_0 ; y_0)$, un réel positif r et C le cercle de centre A et de rayon r .

Pour tout point $M(x ; y)$ du plan,

$$\text{On a alors } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM}^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$

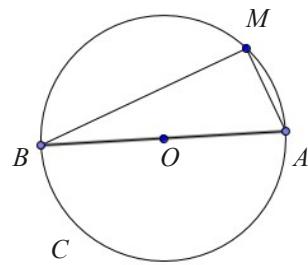
Le cercle C est donc l'ensemble des points $M(x ; y)$ du plan tels que $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

B) CARACTÉRISATION D'UN CERCLE DE DIAMÈTRE DONNÉ

Propriété :

Soit A et B deux points distincts du plan.

La cercle C de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$



Preuve :

Comme vous le savez depuis longtemps, le cercle C , privé des points A et B , est l'ensemble des points M du plan tels que le triangle MAB est rectangle en M , c'est à dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

D'autre part, si $M = A$ ou $M = B$, alors $\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ et on a encore $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

APPLICATION : ÉQUATION D'UN CERCLE DE DIAMÈTRE DONNÉ

Étude d'un exemple :

On se place dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminons une équation du cercle C de diamètre $[AB]$ avec $A(-1; 3)$ et $B(2; 2)$.

Soit $M(x; y)$ un point du plan.

On a $M \in C \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

Or $\overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} -1-x \\ 3-y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} 2-x \\ 2-y \end{pmatrix}$

$$\text{Ainsi } M \in C \Leftrightarrow (-1-x)(2-x) + (3-y)(2-y) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - 5y + 4 = 0$$

Remarque :

En développant $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ (trouvé en A) on obtient une équation de la forme $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ (où a , b et c sont des réels), mais réciproquement une équation de cette forme ne représente pas toujours un cercle.

Exemple :

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - x - 3y + 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow (x^2 - x) + (y^2 - 3y) + 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3 = 0 \\ & \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ce qui est impossible ; l'ensemble des points vérifiant cette relation est donc l'ensemble vide.

4) TRIGONOMÉTRIE

A) FORMULES D'ADDITION

Propriétés :

$\forall a \in \mathbb{R}$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \quad ; \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a \quad ; \quad \sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

Preuve :

- $\bullet \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

On considère le cercle trigonométrique C de centre O muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On note A et B les points de C , définis par $(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) = a$ et $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b$.

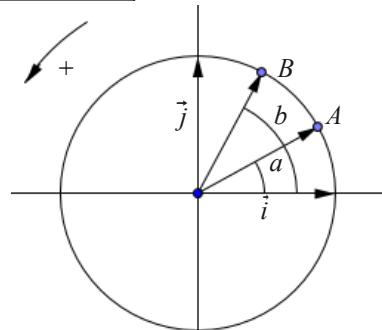
Les coordonnées de A et de B sont respectivement $(\cos a; \sin a)$ et $(\cos b; \sin b)$.

D'autre part, d'après la relation de Chasles, on a :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \vec{i}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = -(\vec{i}, \overrightarrow{OA}) + (\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = b - a$$

Calculons alors de deux manières le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$:

- avec les coordonnées : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- en utilisant $\cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$: $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \cos(b - a) = OA \times OB \times \cos(a - b)$



Ainsi $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Il suffit d'écrire $\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) \dots$

- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Il suffit d'écrire $\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) = \dots$

- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Il suffit d'écrire $\sin(a - b) = \sin(a + (-b)) = \dots$

Exemple :

En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, on peut calculer les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

- $\cos \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
- $\sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

B) FORMULES DE DUPLICATION ET DE LINÉARISATION

FORMULES DE DUPLICATION

FORMULES DE LINEARISATION

Propriétés :

$\forall a \in \mathbb{R}$, on a :

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$

- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2}$
- $\sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$

Preuve :

En prenant $b = a$, dans les formules précédentes on obtient $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ et $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

En utilisant la relation $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on obtient $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ et $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$

On en déduit les deux dernières formules.